**Puissance n-ième d'une matrice carrée d'ordre 2 ou 3**

**Objectif**

Savoir utiliser la notation puissance d'une matrice d'ordre 2 ou 3.  
Calculer la puissance *n*-ième d'une matrice d'ordre 2 ou 3.  
Puissance *n*-ième d'une matrice diagonale d'ordre 2 ou 3.  
Puissance *n*-ième d'une matrice triangulaire supérieure stricte d'ordre 3.

De nombreux problèmes se résolvent à l'aide des puissances de matrices, on devra être capable d'utiliser sa calculatrice pour déterminer les coefficients.

[Cours particuliers de Mathématiques niveau Lycée](https://www.livementor.com/cours-particuliers/Lycee/Mathematiques?widget=nov15&utm_source=http://www.cours.fr/)

**1. Puissance n-ième d'une matrice carrée**

a. Définition

Soit *A* une matrice carrée d'ordre 2 ou 3. Pour tout entier naturel *n* non nul, on a :  
***An*+1 = *A × An* = *An × A* et *A*1 = *A*.**

***Remarque*** **:**

*A* et *An* commutent.

**Attention !**  
On n'obtient pas, dans la plupart des cas, les coefficients de *An* en prenant la puissance *n*-ième des coefficients de *A*.

b. Exemples

***Exemple 1 :***

A = http://api.cours.fr/v1/api/corpus/data/mtabswf/opd/460033/img/4/6/4/9/464914.gif. On a A2 = http://api.cours.fr/v1/api/corpus/data/mtabswf/opd/460033/img/4/6/4/9/464917.gifet A3 = http://api.cours.fr/v1/api/corpus/data/mtabswf/opd/460033/img/4/6/4/9/464919.gif.

***Exemple 2 :***

A = http://api.cours.fr/v1/api/corpus/data/mtabswf/opd/460033/img/4/6/4/9/464922.gif. On a A2 = http://api.cours.fr/v1/api/corpus/data/mtabswf/opd/460033/img/4/6/4/9/464924.gifet A3 = http://api.cours.fr/v1/api/corpus/data/mtabswf/opd/460033/img/4/6/4/9/464926.gif.

**2. Cas des matrices diagonales**

a. Définition

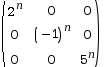
Une matrice est **diagonale** si tous ses coefficients en dehors de sa diagonale principale sont nuls.

***Exemple :*** http://api.cours.fr/v1/api/corpus/data/mtabswf/opd/460033/img/4/6/4/9/464928.gifest une matrice diagonale.

b. Puissance n-ième

Pour trouver la puissance *n*-ième d'une matrice diagonale, il suffit d'élever à la puissance *n* les coefficients de la diagonale, tous les autres coefficients restant nuls.

**Preuve :**

Procédons par récurrence, dans le cas des matrices d'ordre 2.  
Soit *D* une matrice diagonale, il existe deux réels *a* et *b* tels que *D* = http://api.cours.fr/v1/api/corpus/data/mtabswf/opd/460033/img/4/6/4/9/464930.gif. Montrons que pour tout entier naturel *n* non nul, on a : *Dn* =http://api.cours.fr/v1/api/corpus/data/mtabswf/opd/460033/img/4/6/4/9/464932.gif.  
*Initialisation* : pour *n* = 1, *D*1 =http://api.cours.fr/v1/api/corpus/data/mtabswf/opd/460033/img/4/6/4/9/464934.gif.  
*Hérédité* : supposons qu'au rang *n* on ait *Dn* = http://api.cours.fr/v1/api/corpus/data/mtabswf/opd/460033/img/4/6/4/9/464936.gif. On a alors *Dn*+1 = *D* × *Dn* = http://api.cours.fr/v1/api/corpus/data/mtabswf/opd/460033/img/4/6/4/9/464938.gif.  
*Conclusion* : pour tout entier naturel *n* non nul, on a *Dn* =http://api.cours.fr/v1/api/corpus/data/mtabswf/opd/460033/img/4/6/4/9/464940.gif.  
***Exemple :*** *A* = http://api.cours.fr/v1/api/corpus/data/mtabswf/opd/460033/img/4/6/4/9/464942.gif. On a pour tout entier naturel *n* non nul *An* =.

**3. Cas des matrices triangulaires supérieure stricte**

a. Définition

Une matrice est dite **triangulaire supérieure stricte** si tous ses éléments situés sous sa diagonale principale sont nuls ainsi que tous les éléments de sa diagonale principale.

***Exemple :*** http://api.cours.fr/v1/api/corpus/data/mtabswf/opd/460033/img/4/6/4/9/464946.gifest une matrice triangulaire supérieure stricte.

b. Puissance n-ième d'une matrice triangulaire supérieure stricte d'ordre 3

Si *T* est une **matrice triangulaire supérieure stricte d'ordre 3**, alors pour tout entier naturel supérieur ou égal à 3, on a *T*3 = http://api.cours.fr/v1/api/corpus/data/mtabswf/opd/460033/img/4/6/4/9/464948.gif.

***Remarque :*** C'est la raison pour laquelle il est utile de les repérer !

**L'essentiel**

Pour *A*, matrice carrée d'ordre 2 ou 3, *An*+1 = *A An* = *An A* et *A*1 = *A*.  
Pour une matrice diagonale, il suffit d'élever à la puissance *n* les coefficients de la diagonale.  
Pour *Tn*, *T* matrice triangulaire supérieure stricte d'ordre 3, les coefficients deviennent nuls lorsque *n* > 3.